Lokální pohled na peanovské součiny

Petr Glivický

petrglivicky@gmail.com

Výjezdní zasedání KTIML 2011

Content

Co děláme

- Zabýváme se modely Peanovy aritmetiky (PA) zejména s ohledem na možnosti jejich „konstrukce“.
- Cíl (vzdálený): metoda prokazování konzistencí v aritmetice.

Co děláme

- Zabýváme se modely Peanovy aritmetiky (PA) zejména s ohledem na možnosti jejich „konstrukce“.
- Cíl (vzdálený): metoda prokazování konzistencí v aritmetice.
- Žádný nestandardní model PA nelze zkonstruovat v pravém slova smyslu.
- Tennenbaumova věta: V každém spočetném nestandardním modelu PA jsou součet i součin nerekurzivní.

Co děláme

- Zabýváme se modely Peanovy aritmetiky (PA) zejména s ohledem na možnosti jejich „konstrukce“.
- Cíl (vzdálený): metoda prokazování konzistencí v aritmetice.
- Žádný nestandardní model PA nelze zkonstruovat v pravém slova smyslu.
- Tennenbaumova věta: V každém spočetném nestandardním modelu PA jsou součet i součin nerekurzivní.

Náš přístup

Principy:

- fixovaná aditivní část:
  - Na saturovaném modelu $\mathcal{M}_+$ Presburgerovy aritmetiky (Pr) existuje pro každou kompletní extenzi $S \supset$PA součin $\cdot_S$ s $\langle \mathcal{M}_+, \cdot_S \rangle \models S$.
  - Namísto celých modelů PA konstruujeme pouze „peanovské součiny" na jednom pevně zvoleném saturovaném modelu Pr.

Náš přístup

Principy:

- fixovaná aditivní část:
  - Na saturovaném modelu $\mathcal{M}_+$ Presburgerovy aritmetiky (Pr) existuje pro každou kompletní extenzi $S \supset$PA součin $\cdot_S$ s $\langle \mathcal{M}_+, \cdot_S \rangle \models S$.
  - Namísto celých modelů PA konstruujeme pouze „peanovské součiny“ na jednom pevně zvoleném saturovaném modelu Pr.
- lokální pohled:
  - Předepíšeme-li hodnoty součinu v nějakých bodech, jaká omezení na možné hodnoty v jiných bodech si vynutí požadavek peanovskosti?

Peanovská nezávislost

Mějme $\langle \mathcal{M}_+, \cdot \rangle \models \mathrm{PA}$ saturovaný a $X = \{(x_i, y_i); i \in I\} \subseteq M^2$.

Otázka

Pro jaké body $(a, b) \in M^2$ existuje peanovský součin $\circ$ shodující se s $\cdot$ na X a lišící se v (a, b)?

Peanovská nezávislost

Mějme $\langle \mathcal{M}_+, \cdot \rangle \models \mathrm{PA}$ saturovaný a $X = \{(x_i, y_i); i \in I\} \subseteq M^2$.

Otázka

Pro jaké body $(a, b) \in M^2$ existuje peanovský součin $\circ$ shodující se s $\cdot$ na X a lišící se v (a, b)?

Takový bod (a, b) pak nazýváme peanovsky nezávislý na X (vzhledem k $\cdot$). Definujeme i jiné druhy nezávislosti než peanovskou.

Peanovská nezávislost

Je-li $|X| < |M|$ není těžké dokázat následující:

Tvrzení (o nezávislosti)

(a, b) je $\cdot$-izomorfně nezávislý na X $\Leftrightarrow$ $a \cdot b$ není skorouniformně definovatelný v $\mathcal{M}_+$ z parametrů $a, b, x_i, y_i, x_i \cdot y_i$, $i \in I$.

Peanovská nezávislost

Je-li $|X| < |M|$ není těžké dokázat následující:

Tvrzení (o nezávislosti)

(a, b) je $\cdot$-izomorfně nezávislý na X $\Leftrightarrow$ $a \cdot b$ není skorouniformně definovatelný v $\mathcal{M}_+$ z parametrů $a, b, x_i, y_i, x_i \cdot y_i$, $i \in I$.

Odtud plyne kritérium: Nechť alespoň jeden z prvků a, b není tvaru $L(\overline{z})$, kde L je lineární forma s koeficienty v $\mathbb{Q}$ a každé z_j je mezi $a, b, x_i, y_i, x_i \cdot y_i$, $i \in I$. Pak (a, b) je peanovsky nezávislý na X.

Peanovská nezávislost

Je-li $|X| < |M|$ není těžké dokázat následující:

Tvrzení (o nezávislosti)

(a, b) je $\cdot$-izomorfně nezávislý na X $\Leftrightarrow$ $a \cdot b$ není skorouniformně definovatelný v $\mathcal{M}_+$ z parametrů $a, b, x_i, y_i, x_i \cdot y_i$, $i \in I$.

Odtud plyne kritérium: Nechť alespoň jeden z prvků a, b není tvaru $L(\overline{z})$, kde L je lineární forma s koeficienty v $\mathbb{Q}$ a každé z_j je mezi $a, b, x_i, y_i, x_i \cdot y_i$, $i \in I$. Pak (a, b) je peanovsky nezávislý na X.

Podstatnou roli při jakékoli aplikaci tvrzení hraje znalost eliminační množiny v $Pr \models \mathcal{M}_+$.

Peanovská nezávislost

Pokud $|X| = |M|$, je v některých případech možné rozdělit X na $X = Y \cup Z$, $Z = \{(x_i, y_i); i \in I'\}$ tak, že $|Z| < |M|$ a $\cdot \restriction Y$ lze „zakódovat“ do struktury $\mathcal{F} = \langle \mathcal{M}_+, \ldots \rangle$ (fixátor $\cdot$ na Y).

Peanovská nezávislost

Pokud $|X| = |M|$, je v některých případech možné rozdělit X na $X = Y \cup Z$, $Z = \{(x_i, y_i); i \in I'\}$ tak, že $|Z| < |M|$ a $\cdot \restriction Y$ lze „zakódovat" do struktury $\mathcal{F} = \langle \mathcal{M}_+, \ldots \rangle$ (fixátor $\cdot$ na Y). Pak platí:

Tvrzení (druhé o nezávislosti)

(a, b) je $\cdot$-izomorfně nezávislý na $X \Leftrightarrow a \cdot b$ není skorouniformně definovatelný v $\mathcal{F}$ z parametrů $a, b, x_i, y_i, x_i \cdot y_i$, $i \in I'$.

Pro aplikaci tvrzení je nutné znát eliminační množinu $\mathcal{F}$.

Potkavší se dvojice

Definice

Nechť $\mathcal{M}_+ \models \mathrm{Pr}$ *a* $(\cdot\,,\circ)$ *je dvojice peanovských se součinů na* M*.*
Říkáme, že $(\cdot\,,\circ)$ *je* ***potkavší se dvojice*** *s bodem setkání* $a \in M$*,*
pokud v $\langle \mathcal{M}_+, \cdot, \circ \rangle$ *platí* $(\forall x)(a \cdot x = a \circ x)$ *a* $(\exists c, d < a)(c \cdot d \neq c \circ d)$*.*

Potkavší se dvojice

Definice

Nechť $\mathcal{M}_+ \models \mathrm{Pr}$ *a* $(\cdot\,,\circ)$ *je dvojice peanovských se součinů na* M*.*
Říkáme, že $(\cdot\,,\circ)$ *je* *potkavší se dvojice* *s bodem setkání* $a \in M$*,*
pokud v $\langle \mathcal{M}_+, \cdot, \circ \rangle$ *platí* $(\forall x)(a \cdot x = a \circ x)$ *a* $(\exists c, d < a)(c \cdot d \neq c \circ d)$*.*

Potkavší se dvojice umožňují konstrukci nových součinů s jistou mírou indukce.

Konkrétně indukce pro (ko)omezeně lineární formule, tj. formule $\psi(x)$ takové, že v každém součinu je jeden z činitelů x a všechny kvantifikace jsou (ko)omezené do x.

Potkavší se dvojice

Věta

Nechť $\mathcal{M} = \langle \mathcal{M}_+, \cdot \rangle$ *je saturovaný model* PA, *a* $\in M \setminus \mathbb{N}$. *Pak existuje peanovský součin* $\circ$ *na* $\mathcal{M}_+$ *takový, že* $(\cdot\,, \circ)$ *je potkavší se dvojice s bodem setkání a.*

Potkavší se dvojice

Věta

Nechť $\mathcal{M} = \langle \mathcal{M}_+, \cdot \rangle$ je saturovaný model PA, $a \in M \setminus \mathbb{N}$. Pak existuje peanovský součin $\circ$ na $\mathcal{M}_+$ takový, že $(\cdot\,, \circ)$ je potkavší se dvojice s bodem setkání a.

Problém je ekvivalentní s otázkou, zda existují $c, d < a$ taková, že (c, d) je peanovsky nezávislý na $X_a = \{(a, m); m \in M\}$. Je $|X_a| = |M|$ a $\mathcal{F} = \langle \mathcal{M}_+, \_ \cdot a \rangle$ je fixátorem pro X_a.

Potkavší se dvojice

Věta

Nechť $\mathcal{M} = \langle \mathcal{M}_+, \cdot \rangle$ je saturovaný model PA, $a \in M \setminus \mathbb{N}$. Pak existuje peanovský součin $\circ$ na $\mathcal{M}_+$ takový, že $(\cdot\,, \circ)$ je potkavší se dvojice s bodem setkání a.

Problém je ekvivalentní s otázkou, zda existují $c, d < a$ taková, že (c, d) je peanovsky nezávislý na $X_a = \{(a, m); m \in M\}$. Je $|X_a| = |M|$ a $\mathcal{F} = \langle \mathcal{M}_+, \_ \cdot a \rangle$ je fixátorem pro X_a.

Aplikací druhého tvrzení o nezávislosti lze úlohu převést na problém eliminace kvantifikátorů v $\mathcal{F}$. Eliminace v $\mathcal{F}$ je přitom důsledkem eliminace kvantifikátorů v tzv. R-lineární aritmetice (LA_R), kde $R = \mathcal{M}^{\pm} \cap \mathbb{Q}[a]$.

Eliminace kvantifikátorů v LA_R

Nechť R je diskrétně uspořádaný regulárně kvazieuklidovský stupňovitý obor integrity.

Definice

R-lineární aritmetika (LA_R) je teorie v jazyce $L_R = \langle 0, 1, +, \leq, \boxed{r} \rangle_{r \in R}$ rozšiřující teorii diskrétně uspořádaných R-modulů s jednotkou o schéma indukce pro všechny L_R-formule (ekvivalentně o schéma R-divizibility).

Eliminace kvantifikátorů v LA_R

Nechť R je diskrétně uspořádaný regulárně kvazieuklidovský stupňovitý obor integrity.

Definice

R-lineární aritmetika (LA_R) je teorie v jazyce $L_R = \langle 0, 1, +, \leq, \boxed{r} \rangle_{r \in R}$ rozšiřující teorii diskrétně uspořádaných R-modulů s jednotkou o schéma indukce pro všechny L_R-formule (ekvivalentně o schéma R-divizibility).

Teorie LA_R se nacházejí „mezi Pr a PA“. Analýza LA_R poskytuje určitý vhled do komplexity peanovských součinů.

Eliminace kvantifikátorů v LA_R

Věta

Každá L_R-formule je v LA_R ekvivalentní nějaké disjunkci pozitivně primitivních formulí.

Důkaz je založen na „divovém kalkulu“ — kalkulu termů jazyka $L_{div} = \langle 0, 1, +, -, \leq, \_ \cdot r, \_ \operatorname{div} r \rangle_{r \in R}$.

Eliminace kvantifikátorů v LA_R

Věta

Každá L_R-formule je v LA_R ekvivalentní nějaké disjunkci pozitivně primitivních formulí.

Důkaz je založen na „divovém kalkulu“ — kalkulu termů jazyka $L_{div} = \langle 0, 1, +, -, \leq, \_ \cdot r, \_ \operatorname{div} r \rangle_{r \in R}$.
Dva hlavní motivy důkazu jsou:

- Geometrický: Každá křivka $y = (qx) \operatorname{div} r$ v M^2 pro $q, r \in R$ je parametrizována jistou dvojicí forem definovaných na n-rozměrné „spirále“, kde n je délka řetězového zlomku $\frac{q}{r}$. Analogie s eliptickými křivkami.

Eliminace kvantifikátorů v LA_R

Věta

Každá L_R-formule je v LA_R ekvivalentní nějaké disjunkci pozitivně primitivních formulí.

Důkaz je založen na „divovém kalkulu“ — kalkulu termů jazyka $L_{div} = \langle 0, 1, +, -, \leq, \_ \cdot r, \_ \operatorname{div} r \rangle_{r \in R}$.
Dva hlavní motivy důkazu jsou:

- Geometrický: Každá křivka $y = (qx) \operatorname{div} r$ v M^2 pro $q, r \in R$ je parametrizována jistou dvojicí forem definovaných na n-rozměrné „spirále“, kde n je délka řetězového zlomku $\frac{q}{r}$. Analogie s eliptickými křivkami.
- Fourierovský: Každý term t jazyka L_{div} lze vyjádřit ve tvaru $t(x) = \sum q_i(x \operatorname{div} r_i) + N(x)$, kde $q_i(x \operatorname{div} r_i)$ jsou „harmonické funkce“ a $N(x)$ je „šum“.

Další výsledky

Vedlejším produktem důkazu eliminace kvantifikátorů v LA_R byla konstrukce 2^ω neizomorfních oborů integrity (volitelně PID nebo non-UFD), které jsou ω-stage euklidovské ale nejsou k-stage euklidovské pro žádné $k \in \omega$ [1]. Pokud víme, žádný takový obor nebyl dosud znám.

[1] P. Glivický, J. Šaroch, *Quasi-Euclidean subrings of* $\mathbb{Q}[x]$, bude publikováno v příštím roce.

Poděkování

Děkuji za pozornost.