

Základy (moderní) matematiky

slidy k přednášce Logika a teorie množin (NUMP016, NMUE023)
– ZS 2015/16

Petr Glivický

petrglivicky@gmail.com

Katedra teoretické informatiky a matematické logiky
Univerzita Karlova v Praze

Ke stažení na <http://www.glivicky.cz>

Matematická logika + teorie množin = **základy matematiky**

„Svět matematiky“

Všechno je množina. Formalizace.

Nekonečno **potenciální** vs. **aktuální**.

Bernard Bolzano
důkaz existence aktuálního nekonečna
(1851)

teologický důkaz

Nekonečno je vlastností **množství**.

Cantorova naivní teorie množin

Georg Cantor – **naivní teorie množin** (cca 1874-1884)

Množina = dobře vymezený soubor objektů, symbol \in .

Příklad: množina všech sudých čísel, množina všech lidí, množina všech prvočíselných dvojčat

užitečnost přístupu – existenční důkazy

masová migrace do světa množin

Bertrand Russell – 1901 – spor: **Russellův paradox**

Russellův paradox:

Množina všech množin, které nejsou prvky sama sebe
($M = \{x; x \notin x\}$) je sporná.

spor v samotném jádře teorie množin
nespolehlivost intuice

⇒

potřeba pevných základů

- axiomatizace
- precizace pojmu důkazu
- finitarizace

Shrnutí: Hilbertův program (cca 1920-1930)

Požadavky Hilbertova programu:

- formalizace
- **kompletnost** – „pravda je dokazatelná“
- konzistence
- rozhodnutelnost

Důsledek: vznik formální **predikátové logiky** a **axiomatické teorie množin**

Gödelovy věty a nerealizovatelnost Hilbertova programu

Kurt Gödel – věty o neúplnosti (1931)

⇒

Hilbertův program nerealizovatelný

První Gödelova věta ⇒ Algoritmicky popsatelná teorie obsahující aritmetiku přirozených čísel je nekompletní.

Druhá Gödelova věta ⇒ Algoritmicky popsatelná teorie obsahující aritmetiku přirozených čísel není schopna dokázat vlastní bezespornost.

Každá smysluplná axiomatizace teorie množin je nekompletní a nerozhodnutelná.

po roce 1931 - naplňování revidovaného Hilbertova programu

⇒

- formální matematická logika – precizace pojmů „tvrzení“, „teorie“, „pravdivost“ či „důkaz“
- axiomatická teorie množin – **Zermelo-Fraenkelova axiomatika (ZFC)**
- teorie rekurze – precizace pojmu algoritmu, **Turingův stroj**

Precizace pojmů ⇒ možnost **negativních výsledků** – Hilbertův 10. problém

Motto současnosti: „ZFC je možná bezesporná“